บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวแปรสุ่มที่สร้างด้วยวิธีแปลงผกผัน วิธีการยอมรับและปฏิเสธ และวิธีการรวมนั้น ในที่นี้ได้เรียบเรียงข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยตามลำดับ ดังนี้

1. วิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม 3 วิธี

-วิธีการแปลงผกผัน (Inverse-Transform Method)
-วิธีการยอมรับและปฏิเสธ (The Acceptance and Rejection Method)
-วิธีการรวม (The Convolution Method)

2. การสร้างตัวเลขสุ่มด้วยวิธี Linear Congruential Method

3. วิธีการประมาณค่า

-การประมาณค่าแบบสภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation)
-วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Method of Least Square)

4. กรอบแนวคิดในการวิจัย

DPU

1. วิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม

(Law & Kelton, 2000: 437-459) ในการสร้างตัวแปรสุ่มนั้นมีหลายวิธี เช่น วิธีการแปลงผกผัน (The Inverse Transform Method) วิธีการแยกส่วนประกอบ (The Composition Method) วิธีการรวม (The Convolution Method) วิธีการยอมรับและปฏิเสธ (The Acceptance and Rejection Method) และวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่ต้องอาศัยคุณสมบัติพิเศษ (Special Properties) ซึ่งแต่ละวิธีมีความเหมาะสมสำหรับการสร้างตัวแปรสุ่มในแต่ละการแจกแจงที่แตกต่างกัน สำหรับในการศึกษานี้ศึกษาวิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม 3 วิธี คือ 1) วิธีการแปลงผกผัน (The Inverse Transform Method) 2) วิธีการยอมรับและปฏิเสธ (The Acceptance and Rejection Method) และ 3) วิธีการรวม (The Convolution Method) ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสำหรับใช้สร้างตัวแปรสุ่ม คือ ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) และตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution)

1.1 วิธีการแปลงผกผัน (The Inverse Transform Method)

ในการสร้างตัวแปรสุ่มด้วยวิธีนี้ต้องทราบรูปแบบฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function) ของตัวแปรสุ่มนั้นแล้วนำฟังก์ชันการแจกแจงสะสมนี้มาเท่ากับตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (0,1) นั้นคือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมต้องมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (0,1) เช่นกัน (วิชัย, 2544: 176)

<u>**ทฤษฎี**</u> ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (Cumulative Distribution Function) ของตัวแปรสุ่ม X คือ F(x) จะมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (0,1)

เมื่อ F(X) มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ และ R (Random Number) ก็มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ จึงสามารถใช้วิธีการแปลงผกผันหาค่าตัวแปรสุ่ม ได้ดังนี้

$$F(X) = R$$
$$X = F^{-1}(R)$$

ซึ่งหากเป็นการแจกแจงที่ไม่มีรูปแบบฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่แน่นอน เช่น กรณีถ้าเป็นการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ถ้าค่าพารามิเตอร์แอลฟ่า ไม่เป็นจำนวนเต็มฟังก์ชันการแจกแจงสะสมจะไม่มีรูปแบบที่แน่นอน แต่ถ้าค่าพารามิเตอร์แอลฟ่าเป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมีรูปแบบของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมก็จะสามารถใช้วิธีการแปลงผกผันในการสร้างตัวแปรสุ่มได้ โดยการศึกษานี้จะศึกษากรณีที่ค่าพารามิเตอร์แอลฟ่าเป็นจำนวนเต็มบวกเท่านั้น

สำหรับการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ด้วยวิธีการแปลงผกผันนี้จะสร้างจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Distribution) โดยอาศัยคุณสมบัติของการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential Distribution) คือ ถ้า $X_1,X_2,\ldots,X_m$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันที่มีการแจกแจงแบบ expo (β) แล้ว $X_1+X_2+\ldots+X_n$ จะได้ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (m, β) ซึ่ง m คือค่าพารามิเตอร์แอลฟ่าซึ่งในที่นี้จะได้ค่าที่เป็นจำนวนเต็ม และเรียกการแจกแจงนี้ว่า m-Erlang(β) โดยมีขั้นตอนการสร้างตัวแปรสุ่ม ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ๊กซ์โปเนนเชียล (β) โดย

1.1 สร้างตัวเลขสุ่ม R ~ U(0,1) ด้วยวิธี Linear Congruential Method

1.2 ให้ $x = -\beta \ln R$

1.3 Return

ขั้นตอนที่ 2 นำ x แต่ละตัวที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 มารวมกัน

$X_1+X_2+X_3+\ldots+X_m \sim \text{gamma}(m,\beta)$

ส่วนการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) นั้นสร้างจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต (Geometric Distribution) โดยการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ p จำนวน s ตัว นำมารวมกัน โดยอาศัยคุณสมบัติของการแจกแจงแบบเรขาคณิต คือ ถ้า $X_1,X_2,\ldots,X_s$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและมีการแจกแจงแบบเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์ p แล้ว $X_1+X_2+\ldots+X_s$ จะได้การแจกแจงแบบทวินามลบ ที่มีค่าพารามิเตอร์ s,p เมื่อ s คือ ครั้งที่เกิดความสำเร็จ ส่วน p คือความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จ โดยมีขั้นตอนการสร้างตัวแปรสุ่ม ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเรขาคณิต ดังนี้

1.1 สร้างตัวเลขสุ่ม R ~ U(0,1) ด้วยวิธี Linear Congruential Method

1.2 สร้าง $X = \frac{(\quad)}{(\quad)} - 1$

1.3 Return

ขั้นตอนที่ 2 นำ X แต่ละตัวที่ได้ในขั้นตอนที่ 1 มารวมกัน

$X_1+X_2+X_3+\ldots+X_s \sim \text{Negative Binomial}(s,p)$

1.2 วิธีการยอมรับและปฏิเสธ (The Acceptance and Rejection Method)

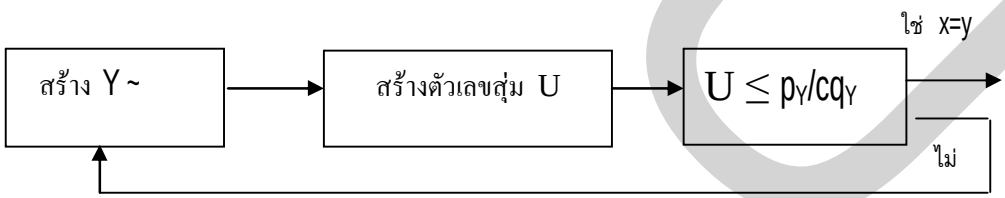
สำหรับการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการยอมรับและปฏิเสธนั้น (Ross, 2002: 53) ถ้าเราสามารถสร้างตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็น $\{q_j, j \geq 0\}$ เราสามารถสร้างการแจกแจงที่มีฟังก์ชัน $\{p_j, j \geq 0\}$ โดยการสร้างตัวแปรสุ่ม Y ให้มีฟังก์ชัน $\{q_j\}$ และยอมรับค่าที่สร้างขึ้นด้วยสัดส่วนความน่าจะเป็น — โดยให้ c เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

— $\leq$ c สำหรับทุกค่า j เมื่อ > 0

ซึ่งเป็นวิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม X ให้มีฟังก์ชัน = (=)

โดยมีขั้นตอนการทำงานดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 สร้างค่า Y ให้มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น q_j
ขั้นตอนที่ 2 สร้างตัวเลขสุ่ม U
ขั้นตอนที่ 3 ถ้า U < —— ให้ X = Y ถ้าไม่ใช่กลับไปที่ขั้นตอนที่ 1

ดังแผนภาพการสร้างค่าตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable Distribution)



ส่วนการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable Distribution) นั้น (Ross, 2002: 67-68) ถ้ามีวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันหนาแน่น g(x) เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่มีฟังก์ชัน f(x) โดยการสร้าง Y จาก g และยอมรับค่าที่สร้างขึ้นนี้ด้วยสัดส่วนความน่าจะเป็น $\frac{(\ )}{(\ )}$ โดยให้ c เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$\frac{f(y)}{g(y)} \leq c$ สำหรับทุกค่าของ y

ซึ่งเป็นวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีความหนาแน่น f

และมีขั้นตอนการทำงานดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 สร้าง Y ให้มีความหนาแน่น g
ขั้นตอนที่ 2 สร้างตัวเลขสุ่ม U
ขั้นตอนที่ 3 ถ้า $U \leq \frac{(\ )}{(\ )}$ ให้ X = Y ถ้าไม่ใช่กลับไปที่ขั้นตอนที่ 1

ดังแผนภาพการสร้างค่าตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable Distribution)

ซึ่งจากวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการยอมรับและปฏิเสธข้างต้นวิธีการเหมือนกันทั้งการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable Distribution) และตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable Distribution)

สำหรับการใช้วิธีการสร้างตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการยอมรับและปฏิเสธในการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) (Law & Kelton, 2000: 463-464) กำหนดให้ a = $\frac{\ }{\sqrt{\ }}$, b = $\alpha - \ln 4$, q = $\alpha + -$, $\theta = 4.5$ และ d = $1 + \ln \theta$
และมีขั้นตอนการสร้างตัวแปรสุ่มดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างตัวเลขสุ่ม U_1 และ U_2 ~ U(0,1) ด้วยวิธี Linear Congruential Method

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดให้ V=a ln $\frac{\ }{(\quad)}$, Y = α , Z=
และ W=b+qV-Y

ขั้นตอนที่ 3 ถ้า $W+d-\theta Z \geq 0$ ให้ X = Y ถ้าไม่ใช่ ไปขั้นตอนที่ 4

ขั้นตอนที่ 4 ถ้า $W \geq \ln Z$ ให้ X = Y ถ้าไม่ใช่ กลับไปขั้นตอนที่ 1

ส่วนการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) ด้วยวิธีการยอมรับและปฏิเสธ มีขั้นตอนในการสร้างตัวแปรสุ่ม ดังนี้ (Forbes, Evans, Hastings, and Peacock, 2011: 142)

ขั้นตอนที่ 1 สร้างตัวเลขสุ่ม U ~ U(0,1) ด้วยวิธี Linear Congruential Method เท่ากับจำนวนครั้งของการทดลอง

ขั้นตอนที่ 2 ถ้า U < p และเท่ากับ ครั้งที่เกิดความสำเร็จครั้งที่ s ดังนั้นตัวเลขสุ่มที่มีค่ามากกว่า p เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ

ขั้นตอนที่ 3 Return

1.3 วิธีการรวม (The Convolution Method)

(Law & Kelton, 2000: 451-452) จากหลักการของวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการรวม คือ ตัวแปรสุ่ม Y ใดๆ สามารถสร้างได้โดยการนำตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่างๆ หลายๆตัวแปรโดยที่ตัวแปรสุ่มแต่ละตัวนั้นเป็นอิสระต่อกันมารวมกัน กล่าวคือ ถ้ากำหนดให้ ตัวแปรสุ่ม $X_1,X_2,\ldots X_n$ โดยที่ $X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n$ มีการแจกแจงแบบเดียวกับตัวแปรสุ่ม X ดังนั้นสามารถเขียนได้ว่า $Y = X_1+X_2+X_3+\ldots X_n$ ตัวแปรสุ่ม Y ที่ได้จากการรวมค่าตัวแปรสุ่ม X_i จะมีรูปแบบการแจกแจงตามที่ต้องการ ซึ่งจากวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่ได้ระบุไว้สำหรับวิธีการแปลงผกผันสำหรับการศึกษาในที่นี้นั้น การสร้างตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการรวมจะเป็นวิธีเดียวกันกับที่ใช้ในการสร้างตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผันของทั้งการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) และการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) ดังนั้นในการนำเสนอผลในส่วนของค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง RMSE (RMSE:Root of Mean Square Error) ของทั้งสองวิธี คือ วิธีการแปลงผกผัน และวิธีการรวมจะใช้ค่าเดียวกัน

2. การสร้างตัวเลขสุ่มด้วยวิธี Linear Congruential (Linear Congruential Method)

สืบเนื่องจากการศึกษาเพื่อเปรียบเทียบวิธีการสร้างตัวเลขสุ่มเมื่อนำไปประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องและการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง นั้นพบว่า วิธีการที่ใช้ในการสร้างตัวเลขสุ่มที่ศึกษา 5 วิธีซึ่งเป็นวิธีที่มีผู้ที่คิดค้นขึ้นนั้นแต่ละวิธีเมื่อนำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์มีประสิทธิภาพไม่แตกต่างกัน ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงเลือกใช้วิธี Linear Congruential Method (Lehmer, 1951) ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้กันเพื่อสร้างตัวเลขสุ่ม โดยตัวเลขสุ่มต้องมีคุณสมบัติ 2 ข้อ คือ 1) มีความสม่ำเสมอ (Uniformity) และ 2) มีความเป็นอิสระต่อกัน (Independence) เมื่อได้ตัวเลขสุ่มและนำตัวเลขสุ่มนั้นมาใช้ในการสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) และการแจกแจงแบบ

ทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) ด้วยวิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม 3 วิธีที่ใช้ในการศึกษา คือ 1) วิธีการแปลงผกผัน (The Inverse Transform Method) 2) วิธีการยอมรับและปฏิเสธ (The Acceptance and Rejection Method) และ 3) วิธีการรวม (The Convolution Method) ซึ่งเมื่อได้ค่าตัวแปรสุ่มแล้ว จึงนำไปประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับแต่ละการแจกแจง

สำหรับวิธีสร้างตัวเลขสุ่มด้วยวิธี Linear Congruential Method (Lehmer, 1951) วิธีนี้มีสูตรการคำนวณหาดังนี้

$$X_{i+1} = (a X_i + c) \bmod m \qquad ; i = 0,1,2,...$$

$X_1, X_2, X_3, ..., X_i, X_{i+1}$ เป็นเลขจำนวนเต็มอยู่ระหว่าง 0 กับ m -1 เมื่อ

X_0 เป็นตัวเลขเริ่มต้น
a เป็นค่าคงที่ที่ใช้ในการคูณ
c เป็นค่าที่เพิ่มขึ้น
m เป็นตัว Modulus

ดังนั้นจะได้ตัวเลขสุ่ม

$$R_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{m}$$

<u>ตัวอย่างเช่นถ้าต้องการสร้างตัวเลขสุ่ม โดยกำหนดให้</u> a = 65539 c = 435 m = 10000 และ X_0 = 3579

X_{i+1} = (a X_i + c) mod m
X_1 = (65539*3579 + 435) mod 10000
X_1 = 234564516 mod 10000 = 4516
R_1 = 4516/10000 = 0.4516
X_2 = (65539*4516 + 435) mod 10000
X_2 = 4559
R_2 = 4559/10000 = 0.4559
.
.
.

3. วิธีการประมาณค่า 2 วิธี

ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้วิธีการประมาณค่า 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบสภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation) สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) และการประมาณค่าด้วยวิธีโมเมนต์ (Method of moments) สำหรับใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ซึ่งในแต่ละวิธีมีทฤษฎีและวิธีการดังนี้

3.1 การประมาณค่าแบบสภาวะสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เป็นวิธีที่ใช้กันแพร่หลายมากที่สุด มีแนวความคิดมานานตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ 18 คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Karl Friedrich Gauss, 1777-1855) และแดเนียล เบอร์นูลลี่ (Daniel Bernoulli) ได้ใช้วิธีการนี้มาแล้วต่อมาในต้นศตวรรษที่ 20 โรนัลด์ ไอล์เมอร์ ฟิเชอร์ (Ronald Aylmer Fisher, 1890-1962) ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติของวิธีการนี้ ทำให้มีผู้ใช้กันกว้างขวางขึ้น และถือว่าวิธีการนี้เป็นผลงานของฟิเชอร์ โดยเขาได้นำเสนอผลงานเกี่ยวกับวิธีการนี้ในปี ค.ศ.1912 พร้อมทั้งมีการปรับปรุงแก้ไขส่วนที่เกี่ยวข้องให้เหมาะสมขึ้นอีกด้วย นักสถิติคนอื่นๆก็มีส่วนทำให้วิธีการนี้เป็นที่นิยมแพร่หลายยิ่งขึ้นด้วย

นิยาม ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$, $\theta \in \Omega$ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น(Likelihood Function) ของตัวอย่างสุ่ม คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $L = L(\theta;x_1,x_2,\ldots,x_n)=L(\theta)$ ของตัวอย่างสุ่มนั้นที่ถือว่าเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ นั่นคือ

$$L(\theta;x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

นิยาม ค่าของพารามิเตอร์ θ ในเทอมของค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่ม $X_1,X_2,\ldots,X_n$ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นมีค่าสูงสุด เรียกว่า ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator-MLE) ของ θ นั่นคือค่าของ θ คือ $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)$ เป็น MLE ของ θ ก็ต่อเมื่อ $L(\hat{\theta})=L(\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n))$ มีค่าสูงสุด

วิธีการหาตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

เป็นวิธีการหาค่าของพารามิเตอร์ θ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $L(\theta)$ สูงสุด ในการนี้มีข้อควรสังเกตดังต่อไปนี้

1. เป้าหมายในการหา MLE ของ θ คือ การหาค่า θ เรียกว่า $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\ldots,x_n)$ ที่ทำให้
$L(\hat{\theta}; x_1,\ldots,x_n) \geq L(\theta; x_1,x_2,\ldots,x_n)$
เมื่อ $\theta \in \Omega$ และ $X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n$

2. ถ้าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $L(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้(Differentiable function) เมื่อเทียบกับ θ อาจใช้อนุพันธ์หา MLE ของ θ ได้ เมื่อเรนจ์ของ $f(x; \theta)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ θ และ θ อยู่ในช่วงจำนวนจริงช่วงหนึ่งในกรณีดังกล่าว $\hat{\theta}$ คือ รากของสมการ

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

เงื่อนไขพอเพียง (Sufficient Condition) ที่ $\hat{\theta}$ ทำให้ $L(\hat{\theta}) \geq L(\theta), \theta \in \Omega$ คือ

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$$

เมื่อ $\theta = \hat{\theta}$

3. การใช้อนุพันธ์หา MLE ในหลายกรณีใช้ ln L จะสะดวกกว่าที่จะใช้ L
ควรสังเกตว่า

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{1}{L}.\frac{\partial L}{\partial \theta}$$

และ $L > 0$ ดังนั้นเมื่อให้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

เราจะได้ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ดังนั้น นอกจากนั้น เมื่อ

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$ ก็จะทำให้ $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$ ด้วย

นิยาม สมการที่ใช้หา MLE คือ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ หรือ $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ เรียกว่า สมการภาวะน่าจะเป็น (Likelihood equation)

3.2 การประมาณค่าด้วยวิธีโมเมนต์ (Method of moments)

(ประชุม, 2545) เมื่อ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรมีโมเมนต์ที่ 2r เป็น ? $= E(X^{2r})$ แล้ว E( ) = และ V( )=– [–] เมื่อประชากรมีฟังก์ชันความหนาแน่นขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ θ , θ , … , θ และมีโมเมนต์ที่ k คือ ?

และให้โมเมนต์ที่ k ของตัวอย่างเป็น $M = -\sum$ ตัวประมาณแบบโมเมนต์ของ θ , θ , ... , θ คือ ค่าพารามิเตอร์ในเทอมของค่าสังเกต ,..., ที่ได้จากการแก้สมการ

$$? = M \quad ; \; j = 1,2,\ldots,k$$

ซึ่งทั้ง 2 วิธีที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ เขียนเป็นตารางแสดงการแจกแจง ตัวพารามิเตอร์ ตัวประมาณค่า และวิธีประมาณค่าได้ดังนี้ (Forbes,Evans,Hastings and Peacock, 2011: 111,142)

การแจกแจง	พารามิเตอร์	ตัวประมาณค่า	วิธีการประมาณค่า
การแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) Gamma(α,β)	Scale parameter,β	–	Matching moments
	Shape parameter,α	–	Matching moments
การแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) NB(s,p)	p	——— + Quantile y Number of failures $0 \le y \le \infty$ Y an integer	Maximum Likelihood Estimator

สำหรับในงานวิจัยนี้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) นอกจากการประมาณค่าโดยใช้ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับประมาณค่าพารามิเตอร์แอลฟ่า (α) และเบต้า (β) ดังตารางข้างต้นแล้ว ยังทดลองใช้การประมาณค่าโดยการประมาณค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่มเพื่อใช้ในการพิจารณาค่า RMSE (RMSE:Root of Mean Square Error) เพิ่มเติม เนื่องจากมีค่า RMSE (RMSE:Root of Mean Square Error) บางค่าพารามิเตอร์ของการทดสอบที่ได้ผลของวิธีการในการใช้สำหรับสร้างตัวแปรสุ่มที่มีประสิทธิภาพแตกต่าง ซึ่งสำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ α β และใช้ตัวประมาณค่าคือ –

ส่วนการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) ในที่นี้ใช้การประมาณด้วยค่าเฉลี่ย โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ – และใช้ตัวประมาณค่าคือ –

4. กรอบแนวคิดในการวิจัย

โดยภาพรวมแล้วสำหรับการศึกษาในครั้งนี้เป็นการศึกษาถึงวิธีการสร้างตัวแปรสุ่ม 3 วิธี คือ วิธีการแปลงผกผัน (The Inverse Transform Method) วิธีการยอมรับและปฏิเสธ (The Acceptance and Rejection Method) และวิธีการรวม (The Convolution Method) และเปรียบเทียบตัวแปรสุ่มที่สร้างด้วยวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มทั้ง 3 วิธีๆ ใดที่ได้ตัวแปรสุ่มที่มีประสิทธิภาพที่สุด โดยทดสอบด้วยการใช้แต่ละวิธีสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution) ซึ่งเป็นแบบหนึ่งของการแจกแจงสำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง (Continuous Random Variable) และสร้างตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงแบบทวินามลบ (Negative Binomial Distribution) ซึ่งเป็นแบบหนึ่งของการแจกแจงสำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) ซึ่งเมื่อสร้างตัวแปรสุ่มจากแต่ละวิธีได้แล้วจึงนำไปประมาณค่าพารามิเตอร์ ที่ค่าพารามิเตอร์ จำนวนตัวอย่าง และจำนวนรอบของการทดสอบที่แตกต่างกัน โดยวิธีการสร้างตัวแปรสุ่มที่มีประสิทธิภาพที่สุด จะเป็นวิธีที่ได้ค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง RMSE (RMSE:Root of Mean Square Error) น้อยที่สุด

DPU